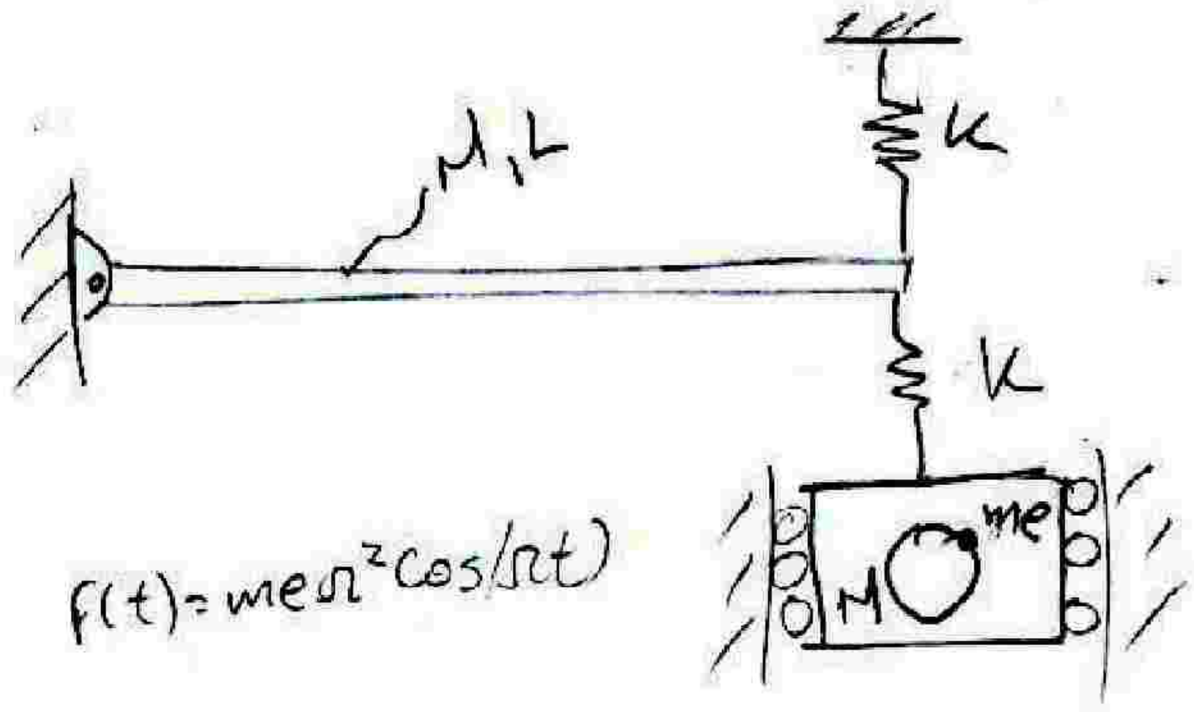
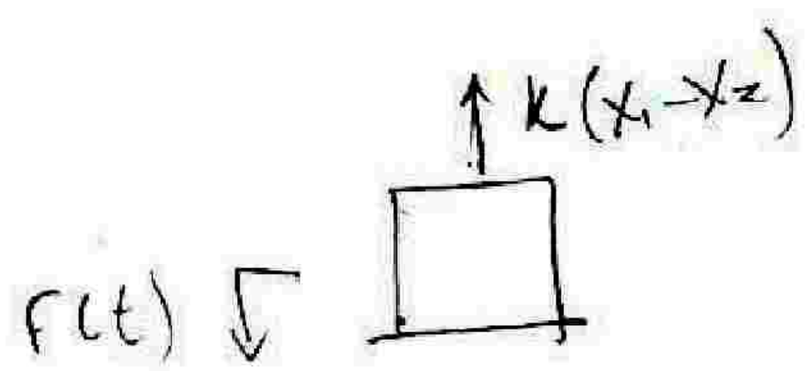
Prepa 4

1) HALLAR LAS FRECUENCIAS NATURALES, MODOS DE VIBRACIÓN, MATRICES MODALES DE MASA Y RIGIDEZ, Y LA LEY DE MOV. QUE RIGE EL SIG. SISTEMA



$M = 20$ kg
$K = 2600$ N/m
$me = 1$ kg·m
$\Omega = 3600$ RPM.

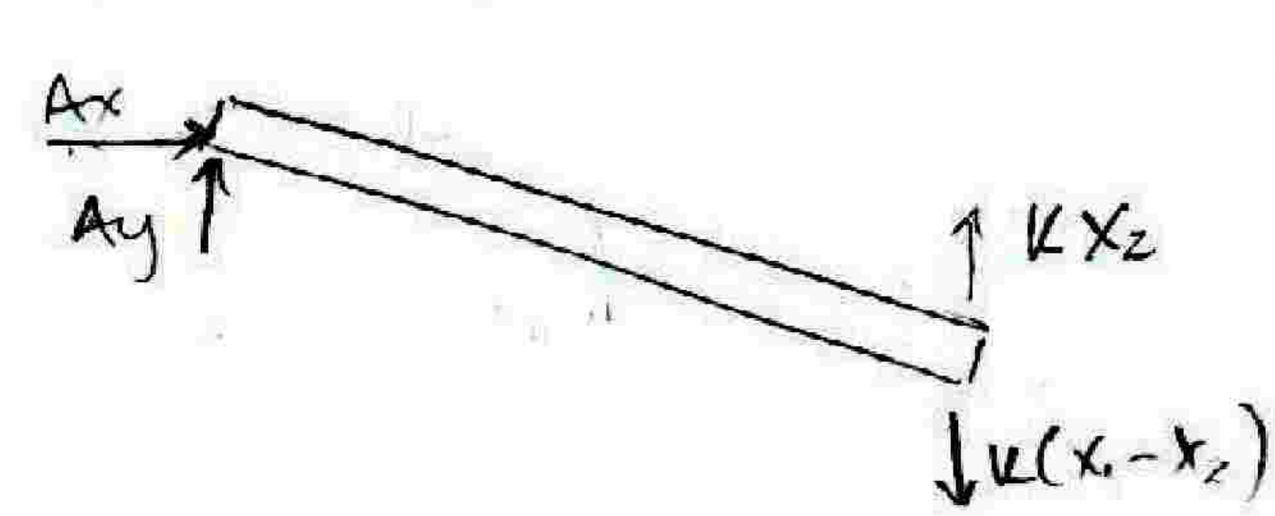
D.C.L. motor $\qquad x_1 > x_2$



$$K(x_1 - x_2) - f(t) = -M\ddot{x}_1$$

$$\text{(I)} \quad M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = f(t)$$

D.C.L barra



$$Kx_2 \cdot L - K(x_1 - x_2)L = -I_A\ddot{\theta}$$

$$I_A\ddot{\theta} + 2Kx_2L - Kx_1L = 0$$

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2 \qquad \theta = \frac{x_2}{L} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_2}{L}$$

(extremo de una barra)

$$\frac{1}{3}ML^2 \cdot \frac{\ddot{x}_2}{L} + 2Kx_2L - Kx_1L = 0$$

$$\frac{1}{3}M\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Recordar que no se está colocando el peso en los D.C.L pues se cancela con la deflexión estática de los resortes.

Se está usando la simplificación de ángulos pequeños en la sumatoria de momentos ($\cos\theta \approx 1$) y en la relación entre x y θ ($\operatorname{sen}\theta \approx \theta$)

Con las ec. (I) y (II)

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{f(t)\}$$

- Respuesta libre

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

$$\left([M]\lambda^2 + [K]\right)\bar{\phi} = \{0\}$$

AUTOVALORES (FRECUENCIAS NATURALES)

AUTOVECTORES (MODOS DE VIBRACIÓN).

$$\det\left([M]\lambda^2 + [K]\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} M\lambda^2 + K & -K \\ -K & \frac{1}{3}M\lambda^2 + 2K \end{pmatrix} = 0$$

$$(M\lambda^2 + K)\left(\frac{1}{3}M\lambda^2 + 2K\right) - K^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}M^2\lambda^4 + 2MK\lambda^2 + \frac{1}{3}MK\lambda^2 + 2K^2 - K^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}M^2\lambda^4 + \frac{7}{3}MK\lambda^2 + K^2 = 0$$

Sustituyendo los valores conocidos de K y M, y resolviendo la ecuación

$$\lambda_1^2 = -59.62 \Rightarrow \boxed{\omega_{n1} = 7.72 \text{ rad/s}}$$

$$\lambda_2^2 = -850.38 \Rightarrow \boxed{\omega_{n2} = 29.16 \text{ rad/s}}$$

$$\lambda = \omega_n \cdot i$$

Ahora buscamos los autovectores asociados a cada autovalor

- Para $\lambda_1^2 = -59.62$

$$\left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}M \end{bmatrix} \lambda_1^2 + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1407.6 & -2600 \\ -2600 & 4802.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sabemos que estas dos ec. son L.D, así que tomaremos sólo la primera.

$$1407.6\, \phi_1 - 2600\, \phi_2 = 0$$

tomando $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = \frac{1407.6}{2600} \phi_1 = 0.5414$

- Para $\lambda_2^2 = -850.38$

$$\left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \lambda_2^2 + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -14407.6 & -2600 \\ -2600 & -469.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tomando la 1ra ecuación

$$14407.6\, \phi_1 + 2600\, \phi_2 = 0$$

tomando $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = -5.5414$

Se tiene entonces que

$$\omega_{n1} \rightsquigarrow \bar{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5414 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \omega_{n2} \rightsquigarrow \bar{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5.5414 \end{Bmatrix}$$

La matriz modal será

$$\Phi = [\,\bar{\phi}_1 \;\; \bar{\phi}_2\,]$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5414 & -5.5414 \end{bmatrix}$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$\{X\} = \Phi\{P\} \quad \rightsquigarrow \quad \{\ddot{X}\} = \Phi\{\ddot{P}\}$$

$$[M]\overbrace{\Phi\{\ddot{P}\}}^{\{\ddot{X}\}} + [K]\overbrace{\Phi\{P\}}^{\{X\}} = \{0\}$$

multiplicando por la izquierda por Φ^T

$$\underbrace{\Phi^T[M]\Phi}_{[M^*]}\{\ddot{P}\} + \underbrace{\Phi^T[K]\Phi}_{[K^*]}\{P\} = \{0\}$$

MATRIZ DIAGONAL

$$[M^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5414 \\ 1 & -5.5414 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5414 & -5.5414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.95 & 0 \\ 0 & 224.71 \end{bmatrix}$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5414 \\ 1 & -5.5414 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2600 & -2600 \\ -2600 & 5200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5414 & -5.5414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1308.91 & 0 \\ 0 & 191092 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

- Respuesta permanente

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{f(t)\}$$

Realizando el cambio de variable y multiplicando por la izquierda por Φ^T

$$[M^*]\{\ddot{P}\} + [K^*]\{P\} = \{F^*(t)\} \quad ; \{F^*(t)\} = \Phi^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21.95 & 0 \\ 0 & 224.71 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{P}_1 \\ \ddot{P}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1308.91 & 0 \\ 0 & 191092 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}$$

Se tienen 2 ec. desacopladas, y se pueden resolver como 2 problemas de 1 GDL

- Para P_1 . $21.95\,\ddot{P}_1 + 1308.91\,P_1 = me\,\Omega^2 \cos(\Omega t)$

$$\Omega = 376.99 \text{ rad/s}$$

$$P_1(t) = \frac{\frac{me}{M_{11}^*}\, r_1^2}{\sqrt{(1-r_1^2)^2 + (2\underset{0}{\xi} r_1)^2}} \cos(\Omega t - \underset{0}{\chi_0}) \quad ; \; r_1 = \frac{\Omega}{\omega_{N1}} = 6.32$$

$$M_{11}^* = 21.95$$

$$P_1(t) = -4.6728 \cdot 10^{-2} \cos(376.99\, t)$$

- Para P_2 : $224.71\,\ddot{P}_2 + 191092\,P_2 = me\,\Omega^2 \cos(\Omega t)$

$$P_2(t) = \frac{me}{M_{22}^*} \frac{r_2^2}{\sqrt{(1-r_2^2)^2 + (2\xi r_2)^2}} \quad ; \; r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{N2}} = 0.44$$

$$P_2(t) = 1.0684 \cdot 10^{-4} \cos(376.99\, t)$$

Finalmente, devolvemos el cambio

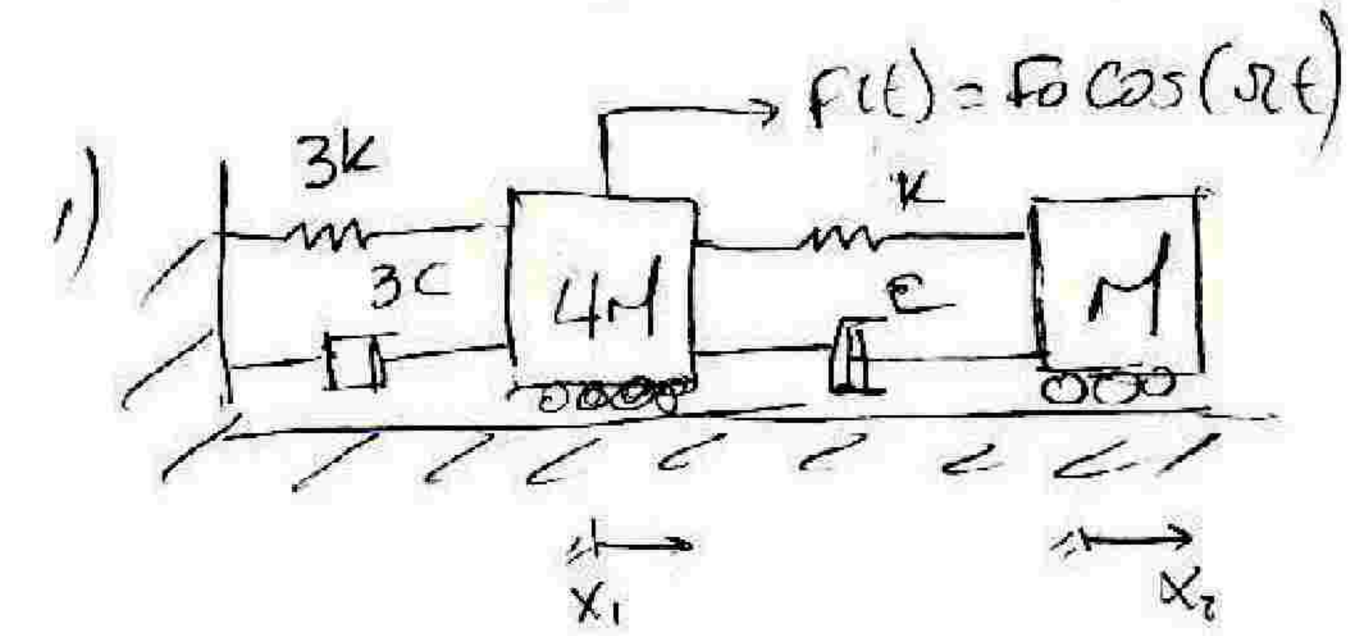
$$\{X\} = \Phi\{P\} = \bar{\phi}_1 P_1 + \bar{\phi}_2 P_2$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5414 \end{Bmatrix} 4.6728\cdot 10^{-2} \cos(376.99t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -5.5414 \end{Bmatrix} 1.0684\cdot 10^{-4} \cos(376.99t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_1(t) &= -4.6621\cdot 10^{-2} \cos(376.99\,t) \\ X_2(t) &= -2.5895\cdot 10^{-2} \cos(376.99\,t) \end{aligned}}$$

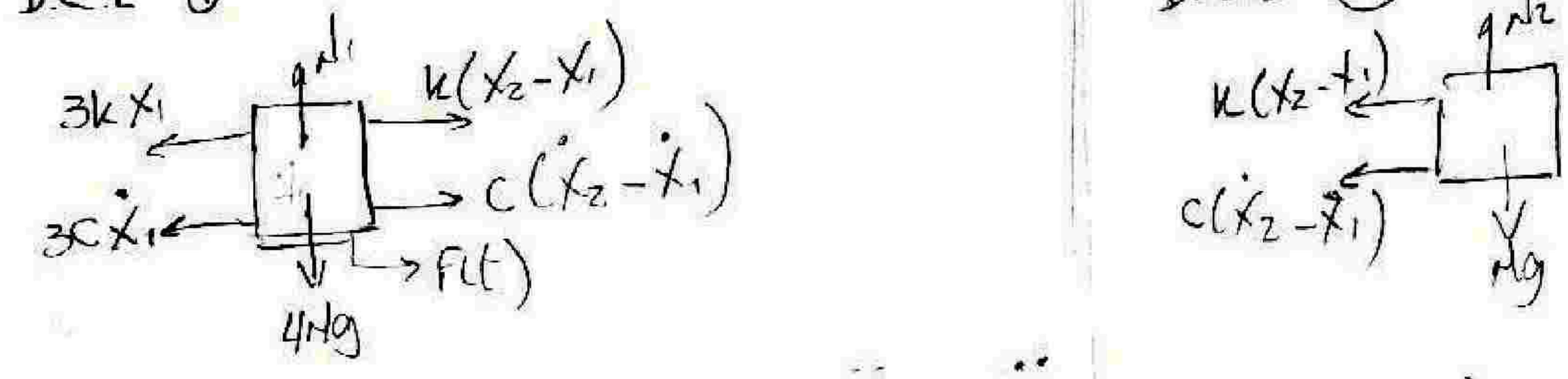
PREPA 2 (2DO. PARCIAL). (1)

1)



HALLAR FRECUENCIAS NATURALES, MODOS DE VIBRACIÓN, MATRICES MODALES DE MASA, RIGIDEZ Y AMORTIGUACIÓN Y LA LEY DE MOV DEL SISTEMA.

D.C.L (1) — D.C.L (2)



$$k(x_2-x_1)+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-3kx_1-3c\dot{x}_1+f(t)=4M\ddot{x}_1$$

$$4M\ddot{x}_1+3kx_1+3c\dot{x}_1+c\dot{x}_1+kx_1-c\dot{x}_2-kx_2=f(t)$$

$$4M\ddot{x}_1+4c\dot{x}_1+4kx_1-c\dot{x}_2-kx_2=f(t)$$

$$-k(x_2-x_1)-c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)=M\ddot{x}_2$$

$$M\ddot{x}_2+kx_2+c\dot{x}_2-kx_1-c\dot{x}_1=0$$

$$\begin{bmatrix} 4M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para hallar las frecuencias naturales trabajamos con la respuesta homogénea, recordando que no se toma en cuenta la amortiguación

$$\begin{bmatrix} 4M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

$$\left([M]\lambda^2+[K]\right)\bar{\phi}=\{0\}$$

AUTOVALORES (FREC. NATURALES)

AUTOVECTORES (MODOS DE VIBRACIÓN)

$$\det\left([M]\lambda^2 + [K]\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4M\lambda^2 + 4K & -K \\ -K & M\lambda^2 + K \end{pmatrix} = 0$$

$$(4M\lambda^2 + 4K)(M\lambda^2 + K) - K^2 = 0$$

$$4M^2\lambda^4 + 4KM\lambda^2 + 4KM\lambda^2 + 4K^2 - K^2 = 0$$

$$4M^2\lambda^4 + 8KM\lambda^2 + 3K^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{-8KM \pm \sqrt{64K^2M^2 - 48K^2M^2}}{8M^2}$$

$$= \frac{-KM \pm 0.5KM}{M^2} = (-1 \pm 0.5)\frac{K}{M}$$

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{K}{M} \Rightarrow \omega_{N_1} = \sqrt{\frac{K}{2M}}$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{3}{2}\frac{K}{M} \Rightarrow \omega_{N_2} = \sqrt{\frac{3K}{2M}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \omega_N \cdot i$$

Ahora para hallar los modos de vibración buscamos los autovectores asociados a cada autovalor

- Para $\lambda_1^2 = -\frac{K}{2M}$

$$\left(\begin{bmatrix} 4M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\lambda_1^2 + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -2K & 0 \\ 0 & -\frac{K}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & \frac{K}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se van a tener estas dos ec., pero siempre serán L.D.,
así que tomamos cualquiera de ellas.

$$2K\phi_1 - K\phi_2 = 0$$

si tomamos $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = 2$; $\omega_{n1} \rightsquigarrow \bar{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

• Para $\lambda_2^2 = -\frac{3K}{2M}$

$$\left(\begin{bmatrix} 4M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \lambda_2^2 + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -6K & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2K & -K \\ -K & -\frac{K}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tomando la 1ra ecuación.

$$-2K\phi_1 - K\phi_2 = 0$$

Tomando $\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_2 = -2$; $\omega_{n2} \rightsquigarrow \bar{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Tenemos entonces los modos de vibración asociados a cada frecuencia natural, que serán

$\omega_{n1} \rightsquigarrow \bar{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ $\qquad$ $\omega_{n2} \rightsquigarrow \bar{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Ahora, se construye la matriz modal como

$$\Phi = [\,\vec{\phi}_1 \;\; \vec{\phi}_2\,]$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida esta matriz, podemos trabajar con la respuesta permanente del sistema

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\}$$

Se propone el siguiente cambio de variable

$$\{X\} = \Phi\{P\} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{X}\} = \Phi\{\dot{P}\} \qquad \{\ddot{X}\} = \Phi\{\ddot{P}\}$$

$$[M]\overbrace{\Phi\{\ddot{P}\}}^{\{\ddot{X}\}} + [C]\overbrace{\Phi\{\dot{P}\}}^{\{\dot{X}\}} + [K]\overbrace{\Phi\{P\}}^{\{X\}} = \{F(t)\}$$

multiplicando por la izquierda por Φ^T

$$\underbrace{\Phi^T[M]\Phi}_{[M^*]}\{\ddot{P}\} + \underbrace{\Phi^T[C]\Phi}_{[C^*]}\{\dot{P}\} + \underbrace{\Phi^T[K]\Phi}_{[K^*]}\{P\} = \underbrace{\Phi^T\{F(t)\}}_{\{F(t)^*\}}$$

MATRICES MODALES DE: MASA — AMORTIGUACIÓN — RIGIDEZ

$$[M^*] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4M & 4M \\ 2M & -2M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4M+4M & 4M-4M \\ 4M-4M & 4M+4M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8M & 0 \\ 0 & 8M \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

$$[C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C & 6C \\ C & -3C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4C & 0 \\ 0 & 12C \end{bmatrix}$$

MATRICES DIAGONAL

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 12k \end{bmatrix}$$

$$\{F(t)^*\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8M & 0 \\ 0 & 8M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{P}_1 \\ \ddot{P}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4C & 0 \\ 0 & 12C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 12k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

Se tienen ahora 2 ec desacopladas que se pueden resolver como dos problemas independientes de 1 GDL.

- Para P_1: $\quad 8M\ddot{P}_1 + 4C\dot{P}_1 + 4kP_1 = F_0 \cos(\Omega t)$

$$P_1(t) = \frac{F_0/4k}{\sqrt{(1-r_1^2)^2 + (2\xi_1 r_1)^2}} \cos(\Omega t - \gamma_1)$$

$$r_1 = \frac{\Omega}{\omega_{n1}} = \frac{\Omega}{\sqrt{k/2M}} \quad ; \quad \xi_1 = \frac{4C}{2\sqrt{4k \cdot 8M}} \quad ; \quad \gamma_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi_1 r_1}{1-r_1^2}\right)$$

- Para P_2: $\quad 8M\ddot{P}_2 + 12C\dot{P}_2 + 12kP_2 = F_0 \cos(\Omega t)$

$$P_2(t) = \frac{F_0/12k}{\sqrt{(1-r_2^2)^2 + (2\xi_2 r_2)^2}} \cos(\Omega t - \gamma_2)$$

$$r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{n2}} = \frac{\Omega}{\sqrt{3k/2M}} \quad ; \quad \xi_2 = \frac{12C}{2\sqrt{12k \cdot 8M}} \quad ; \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi_2 r_2}{1-r_2^2}\right)$$

Finalmente, devolvemos el cambio y obtenemos la respuesta

$$\{x\} = \Phi\{P\} = \bar{\Phi}_1 P_1 + \bar{\Phi}_2 P_2 \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} P_1(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} P_2(t)$$